Grand N n° 52

L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire

Jeanne BOLON
Professeur de mathématiques
IUFM de Versailles

INTRODUCTION

Beaucoup d'études ont été faites sur l'apprentissage des décimaux : Claude Comiti et Robert Neyret (1979), Guy Brousseau (1980, 1981, 1987), Régine Douady (1980), Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin (1986). Ils analysent les difficultés d'apprentissages et proposent des progressions. Cet article a un autre but : mettre en regard les textes officiels, les pratiques ordinaires, et les confronter aux résultats de la recherche pédagogique. D'où l'idée d'aborder le thème des décimaux par l'étude des discours de l'institution scolaire, les évaluations des élèves et les manuels.

L'étude fait émerger des points de contradiction entre les attentes officielles, les performances des élèves, les pratiques courantes que j'ai pu observer dans des classes ordinaires. L'analyse débouche sur des pistes de travail pour des cours de formation initiale ou continue. Mais les quelques propositions auxquelles j'ai abouti sont bien coûteuses...

Plan

I - Les textes officiels d'aujourd'hui au cours moyen (cycle 3) et en 6ème, leur interprétation dans les évaluations de début de 6ème et de fin de 6ème

1.1 Les textes officiels

Regardons d'abord les *textes officiels* et examinons ce qui y est exigé à chacun des niveaux : fin de cycle 3 et 6ème.

Les décimaux apparaissent pour la première fois dans la scolarité au cours moyen. Les objectifs pour le cycle 3 définis en 1991 y font référence sous la rubrique "Connaissance des nombres" et "Calcul". Regardons ce qu'il en est, sur les mêmes thèmes, en 6ème (cf. extraits des programmes en annexe).

Examinons la *continuité* entre le cycle 3 et la 6ème.

La **division euclidienne** d'entiers est inscrite dans la liste des objectifs à atteindre à la fin du cycle 3 : *division euclidienne (avec quotient et reste) de deux entiers.*

Elle se retrouve au paragraphe 2.1 des programmes de 6ème : *sans calculatrice, effectuer la division avec reste d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres.*

La compétence exigible sur la division des entiers est donc moins forte en fin de 6ème qu'à la fin du cycle 3.

Sur les décimaux, le passage d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire est inscrit dans les mêmes termes comme objectif du cycle 3 et compétence exigible de la 6ème (paragraphe 2.2). Il en est de même pour la comparaison de nombres décimaux. En revanche, si la division par 10, 100, 1000 d'un entier ou un décimal figure à la fois dans les deux programmes, elle s'enrichit en 6ème de la division par 0,1 / 0,01 / 0,001. Notons que l'écriture littérale s'entend au primaire comme l'écriture des nombres en lettres, alors qu'en 6ème il s'agit de l'utilisation de formulaires.

Sur les fractions, seules les fractions usuelles (demi, tiers, quart) sont inscrites au cycle 3 ; les calculs sur les décimaux n'y exigent pas l'utilisation de la notation fractionnaire. En revanche, en 6ème, l'initiation au calcul des fractions commence par la transposition des calculs faits sur les décimaux (paragraphe 2.2).

Les problèmes qui rendent nécessaires l'usage des décimaux ou des fractions sont à peine évoqués dans les objectifs de cycle 3 : on y réserve les notions de moyenne, de vitesse moyenne, d'échelle ou de pourcentage pour une "première approche". Dans le programme de 6ème, le préambule souligne l'importance de la résolution de problèmes concrets qui doivent *sous-tendre l'ensemble des travaux numériques* mais les rappels dans le corps du texte sont limités au paragraphe 2.3 (Proportionnalité) et au paragraphe 2.6 (Equations).

La continuité des programmes n'est donc pas très bien assurée. Cela vient probablement du décalage entre les dates de parution des textes officiels[1]. La rupture peut aussi provenir de la différence entre les traditions des enseignements primaire et secondaire : on n'y traite pas de la même manière l'entraînement au calcul et à la résolution de problèmes.

1.2 Les cahiers d'évaluation de début de 6ème

Une autre manière de voir ce qui est important pour les responsables de l'éducation nationale est d'examiner les **cahiers d'évaluation** proposés à la rentrée de septembre 1991.

Peu de problèmes utilisent les décimaux : 1,5 litre pour l'exercice 4, des francs et centimes pour l'exercice 22. Tous les autres exercices abordent les décimaux par leurs propriétés numériques : il s'agit des exercices 11, 14, 15, 16, 18, 19 et 24. Etudions quelques-uns d'entre eux.

Certains exercices sont semblables à ceux de 1990 : on dispose donc d'une analyse des réponses (elles figurent en italique dans ce qui suit).

Multiplication et division par 10, 100, 1000

Ex 24

b) 1,54 x 1000 =
281,28 x 100 =

bonne réponse : 67% (pas d'analyse des réponses)

c) 7,14 x 100 =
3,72 x 1000 =

bonne réponse : 63% (pas d'analyse des réponses)

d) 67 : 100 =
825 : 100 =

bonne réponse : 53%
8 et il reste 25 : 1 %
non-réponse : 11 %

e) 325,6 : 10 =
16,2 : 10 =

bonne réponse : 54%
1 et il reste 6,2 : 0,5 %
non-réponse : 11 %

f) 3000,6 : 1000 =
2127 : 1000 =

bonne réponse : 53%
2 et il reste 127 : 0,8 %
non-réponse : 15 %

Maîtrise des opérations +, -, x, :

Ex 10, c) 9,4 - 6,78 (posé verticalement)

Ex 11, a) 6,25 + 12,85 =
b) 9,37 - 4,6 =
7,25 - 2,38 (verticalement)

bonne réponse : 70%
487 : 16 %
non-réponse : 0,4%

6,25 + 4,68 =

bonne réponse : 88%
erreur de retenue : 2 %
non-réponse : 0,5%

7,24 - 4,3 =

bonne réponse : 51 %
opération mal posée : 2 %
3,21 : 5 %
non-réponse : 1%

Ex 23

b) 11,4 x 5,3 (posée verticalement)
4,28 x 3,5 (verticalement)

bonne réponse : 54%
1498 ou 14980 : 16 %
non-réponse : 1 %

d) 9216 : 4 (posée),
même exercice en 1991

Ranger dans l'ordre, intercaler

Ex 15, b) Réécris dans les cases les quatre nombres, du plus petit au plus grand
19,9 19,19 1,991 9,191
2,7 2,15 1,923

bonne réponse : 62%
réponse 1,923 - 2,7 - 2,15 : 27 %

Ex 16. Dans la case vide écris un nombre compris entre

64 et 68	64	68
64,2 et 64,47	64,2	64,47
64,6 et 64,7	64,6	64,7

82 et 87	82	87	97%
82,47 et 82,68	82,47	82,48	92%
82,5 et 82,6	82,5	82,6	65%

(pas d'analyse de réponses)

Ex 19. Tu dois compléter chaque ligne en choisissant, parmi les nombres suivants, celui qui convient : 6,4 31,7 53 6,13 31,07 65,2
54,1 <
31,70 =
6,23 >

0,12   45,2 58 0,2 95 45,02
73 <   bonne réponse : 80%
non réponse : 10 %
45,20 = bonne réponse : 83%
45,02 : 4 %
non-réponse : 10 %
0,17 > bonne réponse 76%
0,2 : 7 %
non-réponse : 12 %

Désignation des chiffres

Ex 18. Complète les phrases ci-dessous (même exercice qu'en 1990)

Dans le nombre 124,753 le chiffre des centaines est :

bonne réponse : 64%
5 (confusion entre centaines et centièmes) : 3 %
7 (oubli de la place de la virgule) : 11 %
non-réponse : 3 %

Dans le nombre 180,254 le chiffre des dixièmes est :

bonne réponse : 44%
5 (confusion entre dixième et centième) : 25 %
8 (confusion entre dixième et dizaine) : 9 %
non-réponse : 4 %

Dans le nombre 328,315 le chiffre des dizaines est :

bonne réponse : 62%
3 (confusion entre dizaine et dixième)
non-réponse : 5 %

Dans le nombre 13,456 le chiffre 4 est celui des :

bonne réponse : 44%
dizaines : 3 %
non réponse : 8 %

La gestion des chiffres zéros dans les opérations sur les entiers est donc loin d’être stabilisée : par exemple, 13 % d’erreurs sur les zéros à l’exercice Ex 23.e).

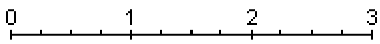
La multiplication et la division de décimaux par 10, 100, 1000, etc. sont en cours d’acquisition (réussites entre 53 et 67 %). Le principe de l’intercalation est-il compris ? On peut en douter quand on regarde les exercices 15, 16 et 19.

Quant à la désignation des chiffres, les confusions sont fréquentes[2].

Les objectif terminaux pour le cycle 3 sont loin d'être atteints sur le chapitre numérique, si, du moins, on adopte pour norme des pourcentages de réussite supérieurs à 70%.

Nous disposons d’une étude faite en novembre 1991 dans l’académie de Nice dans le cadre des stages CM_2-6ème (135 élèves du collège Roustan à Antibes et 185 élèves du collège Matisse à Nice). Les enseignants ont voulu regarder comment les élèves passent d’une écriture fractionnaire à une écriture décimale et réciproquement (objectif de fin de cycle 3) et comment ils situent sur la droite numérique quelques fractions usuelles et les écritures décimales liées.

(Dans le tableau qui suit, les fractions ont été écrites avec la barre oblique / et non de la manière classique. Les pourcentages sont ceux des erreurs et non ceux des réussites.)

Exercice 1 **Dans la liste ci-dessous, entoure les écritures qui représentent 14/10** **140 1,40 1 + 4/10 1,04 1,4 0,14** 1 + 4/10 non entouré 66% 33 % 1,40 non entouré 29 % 1,4 non entouré 22 % 0,14 entouré 16 % 140 entouré 4 % 1,04 entouré	Exercice 2 Sur la droite graduée ci-dessous place les nombres 1/2 1,75 9/4 0,25  9/4 mal placé ou non placé 65% 1/2 mal placé ou non placé 49 % 1,75 " 33% 0,25 " 28 %

La fraction 1/2 suscite plus d'échec que 1,75 ou 0,25 : apparemment les élèves n'ont pas établi de lien entre 1/2 et le milieu du segment [0 1][3].

La fraction 14/10 n'est pas reconnue sous sa forme additive : on peut se demander si les élèves ont vu le rapport entre 14/10 et 14 : 10.

Les savoirs des élèves semblent ainsi constitués d'ilôts non reliés entre eux.

1.3 Des évaluations de fin de 6ème

Ceci est confirmé par les évaluations conduites par l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP) avec des enseignants volontaires en fin de 6ème. Une première étude a été faite en 1987 sur un échantillon représentatif de 200 élèves, certains exercices ont été repris dans une étude faite en 1989 sur un échantillon de 400 classes.

(Les titres ne figurent pas dans les questionnaires remis aux élèves).
(Dans le tableau qui suit, les fractions ont été écrites avec la barre oblique / et non de la manière classique. Les pourcentages sont ici ceux des réussites.)

Multiplication et division par 10 / 100 / 1000 et par 0,1 / 0,01 / 0,001 Items EXB30-EXB31 *Etude 1987 Etude 1989* 38,5 : 100 = *36% 42%* *0,278 : 0,001 = 22% 34%* Maîtrise des opérations +, -, x, : et de leurs inverses Items EXB26 à EXB29 Remplace, dans chaque cas, les pointillés par les nombres qui conviennent :	**Relations entre rationnels et décimaux** Items EXB34-EXB35 Ecris sous forme d'une fraction les nombres suivants : 0,1 = ... 0,6 = ... 3,7 = ... 0,03 = ... *Réussite à l'ensemble* *Etude 1987 : 34% Etude 1989 : 44%* Indique quels sont les nombres décimaux représentés par les fractions suivantes : (écrit de manière habituelle et non comme ici en ligne) 2/5 = ... 7/4 = ... *Réussite à l'ensemble* *tude 1987 : 15%*

	Etude 1987	Etude 1989
12,8 + ... = 53,1	64%	86%
...... + 83,9 = 123	45%	67%
23 x .... = 471,5	28%	49%
... x 125 = 540	15 %	33%

Ranger dans l'ordre, intercaler, calculer des distances	Usage de décimaux dans des problèmes
Item EXA28- Complète en remplaçant dans chaque cas les pointillés par l'un des signes < ou >. *Réussite à l'ensemble Etude 1987 : 66%* *Etude 1989 : 72%* *103,5... 110,51* *17,23... 13,8* *16,18.... 16,108* *0,029... 0,0209* Items APPA11-APPA12 La réponse exacte à un problème est 10,24. Des élèves ont fait ce problème. Voici leurs résultats Juliette a trouvé 10,2329 Adrien a trouvé 10,241 Thibaud a trouvé 10,238 Julien a trouvé 10,25 Qui est l'élève qui a trouvé le résultat le plus proche du résultat exact ? *Etude 1987 : 42%* Qui est l'élève qui a trouvé le résultat le plus éloigné du résultat exact ? *Etude 1987 : 56%*	Items EXD32-EXD33 Les dimensions d'une table sont 2,50 m et 0,96 m. Quelles sont ses dimensions en cm ? *Etude 1987 : 66%* Items EXD34 à EXD37 Compléter : *Etude 1987* 35,7 cm = ...m *55%* 13,2 dm^2 = ... m^2 *67%* 8,56 m^2 = ...dm^2 *48%* 75 cm^2 = ...dm^2 *45%* Vrai ou faux : 8,56 m^2 = 85,6 dm^2 8,56 m^2 = 856 dm^2 75 cm^2 = 7,5 dm^2 75 cm^2 = 0,75 dm^2 Réussite sur l'ensemble 1989 : 50%

On constate que la division par 100 d'un nombre décimal n'est pas stabilisée (42 % en 1989).

L'intercalation semble réussie de manière assez proche de celle observée en début de 6ème (les exercices ne sont pas exactement les mêmes).

La droite graduée n'apparait pas dans l'évaluation de fin de sixième. Les relations entre décimaux et frationnels ne sont pas maîtrisées, y compris pour des fractions dites usuelles comme 7/4 ou 2/5.

Les référents des problèmes sont limités aux longueurs ou aires. En fait, il ne s'agit que de conversions d'unité et non pas de réels problèmes à chercher.

Les relations algébriques sont moyennement réussies pour l'addition à trou, mal réussies pour la multiplication à trou : on peut se demander si les élèves ont été entraînés à contrôler les résultats qu'ils annoncent.

1.4 Chez des adultes non scientifiques

Pour terminer, quelques observations en milieu adulte. Elles rejoignent celles présentées par Marie-Laure Izorche dans son mémoire de DEA (1977), à propos d'une population de 126 élèves de seconde "plutôt littéraires" (la plupart en AB3, futures secrétaires, d'autres en AF2, futurs comptables et quelques-uns en section AA, arts appliqués), et l'étude en cours de Robert Neyret.

Les calculs sont corrects pour des décimaux qui ont tous le même nombre de chiffres après la virgule (baptisés D_1, D_2, D_3 etc. par Marie-Laure Izorche). La plupart des non scientifiques a beaucoup de mal à opérer les transferts d'un D_i à un D_j. Dans un intervalle à bornes entières, par exemple [2, 3], ils ne voient qu'un nombre fini de décimaux.

Les adultes recourent plus volontiers aux nombres décimaux qu'aux écritures algébriques du genre $\sqrt{123/419}$. Au besoin, ils préfèreront transporter dans un calcul un nombre décimal, quitte à oublier qu'il s'agit d'une valeur approchée. Pour eux, le nombre p est égal à 3,14 ou 3,1416 exactement. Les suites décimales illimitées font partie d'un domaine "magique" (qu'elles soient périodiques ou non). Beaucoup ignorent le fonctionnement de leur calculatrice quant à la gestion des arrondis (troncature ou arrondi sur chiffres de réserve). D'ailleurs, la distinction entre nombre réel, rationnel et décimal n'est pas faite.

Dans l'ensemble, les équivalences d'écriture entre division, fraction, décimaux ne sont pas bien maîtrisées.

Les égalités ci-après ne sont pas "automatiques" : 1/5 x 1/2 = 1/5 : 2 ou 1/2 : 5 1/5 : 2 = 1/10 1/2 x 1/10 = 1/10 : 2 ou encore = 1/2 : 10 = 0,1 : 2 = 0,05 75% = 3/4	La connexion entre la division euclidienne et la division exacte n'est pas connue : 107/13 = 8 + 3/13 comme 107 = (8 x 13) + 3 avec 3 < 13 quotient = 8 reste = 3

Le passage de l'écriture décimale à la fraction, voire au pourcentage, n'est pas maîtrisé, même à bac +3. Ne parlons pas des augmentations ou diminutions en pourcentages difficiles à "inverser"...

Des plus jeunes aux plus âgés, la maîtrise des nombres décimaux se fait péniblement : c'est ce sur quoi des chercheurs se sont penchés.

II - Comment on explique aujourd'hui les difficultés d'apprentissage des décimaux [4]

2.1 Les difficultés sont-elles spécifiquement françaises ?

Après la Révolution française, l'usage des décimaux a été introduit dans l'enseignement pour imposer un système unifié de mesure des grandeurs : il fallait en finir avec les systèmes d'unités non décimales[5]. L'usage des décimaux a été associé au système métrique et on a souligné les avantages qu'ils comportent pour les calculs (en particulier les conversions d'unités). Ce sont les seuls aspects des décimaux retenus dans les programmes de l'école primaire jusqu'en 1977. D'autres pays ont conservé la notation fractionnaire dans des usages quotidiens (y compris sur des balances) ; on y trouve une approche des fractions dès l'école primaire.

2.2 Les innovations de l'époque des "mathématiques modernes" (années 1970)

Durant les années 1970, des innovations sont proposées dans plusieurs pays dans le but d'assurer les fondements logiques et mathématiques de l'enseignement : Fletcher en Grande-Bretagne, Wheeler au Canada, Papy en Belgique. On développe en particulier l'étude des nombres à virgule dans différentes bases, qui apparaissent dans des manuels de l'école primaire. D'autres innovations sont introduites : recodage d'entiers, codages de points sur une droite à partir de l'ordre lexicographique, écritures avec virgule "flottante", partages de segments[6].

Claude Comiti et Robert Neyret (1979) se sont interrogés sur des liaisons possibles entre les erreurs observées chez les élèves et les modes d'introduction des décimaux .

En recourant exclusivement au système métrique ou au recodage d'entiers pour introduire les décimaux, l'enseignant favorise l'idée que les décimaux sont constitués d'une partie entière et d'une partie fractionnaire qui se traitent comme des entiers. Il n'est pas surprenant alors que des enfants écrivent 1,38 < 1,275. L'intercalation n'a pas de sens pour les élèves, puisqu'ils croient travailler avec des entiers. Le recours au tableau décimal facilite les exercices de conversion d'unités de grandeurs, mais il présente l'inconvénient de masquer l'algèbre sous-jacente. En effet, la multiplication des nombres est compensée par la division de l'unité de mesure comme ci-après :

123,45 m = 12345 cm
la multiplication par 100 de 123,45 est compensée par la division de l'unité-mètre par 100.

En introduisant les décimaux par les codages de points sur une droite (ordre lexicographique), la comparaison de décimaux est facilitée ainsi que le principe de l'intercalation indéfinie. Mais la liaison avec les opérations est difficile à établir.

Claude Comiti et Robert Neyret concluaient leur article par "quelques lignes directrices" :

- Les décimaux sont de nouveaux nombres. (...) Il faudrait abandonner la présentation à l'aide des mesures ou à l'aide des changements d'unités (...)

- Entre deux décimaux, on peut toujours en intercaler un autre. (...) L'emboîtement des différentes graduations devrait être un axe important de toute étude des décimaux. (...)

- L'ordre sur les décimaux n'est pas le même que celui des entiers. (...) Un travail minimum sur les fractions est nécessaire à un moment ou à un autre. (...)

- Les décimaux servent pour approcher d'autres nombres. (...)

- Les décimaux sont un outil dans les activités de mesure.

2.2 Les obstacles sont aussi d'ordre épistémologique.

Grâce aux travaux de Guy Brousseau et Régine Douady, on explique actuellement les difficultés d'apprentissage sur les décimaux par un ensemble de facteurs.

- Les règles de fonctionnement des entiers ne peuvent être étendues aux décimaux. Elles ne sont pas supprimées pour autant, d'où instabilité pour les élèves. Par exemple, un entier est d'autant plus grand qu'il a un plus grand nombre de chiffres (faux pour les décimaux) ; multiplier augmente (parfois vrai, parfois faux pour les décimaux) ; diviser diminue (parfois vrai, parfois faux pour les décimaux).

- On peut facilement fabriquer une collection de 1000 à 3000 objets ; on peut la mettre à côté d'une collection de 3 objets, de 150 objets, etc. Il est très difficile de fabriquer en même temps des objets dont les mesures seraient 13 ; 13,5 ; 13,05 ; 1,035 (les grandeurs que nous utilisons de manière quotidienne ne permettent pas cette précision). Les décimaux sont une construction d'abord mentale et non physique.

- Les enfants utilisent des algorithmes qui sont performants pour tous les décimaux de la vie quotidienne, mètres et centimètres, francs et centimes, mètres et kilomètres, grammes et kilogrammes, etc. : ce sont leurs pratiques sociales de référence, pour reprendre l'expression de J. L. Martinand. Ils traitent par exemple les mètres d'un côté et les centimètres de l'autre, puis font les conversions. C'est aussi comme cela que sont traitées les opérations sur les durées exprimées en heures, minutes et secondes.

Ils généralisent et traitent séparément la partie entière et la partie décimale :

0,3 x 0,3 = 0,9 (faux) 0,3 x 0,4 = 0,12 (vrai)

Pour comparer des nombres décimaux, ils comparent d'abord la partie entière 13,45 < 123,45. Mais à partie entière égale, ils comparent les parties décimales comme pour des entiers. Une étude récente (Robert Neyret, 1991) montre que les enfants caractérisent la partie décimale en utilisant le vocabulaire de la partie entière : dans 13,475, 4 est pris assez souvent pour le chiffre des centaines. D'ailleurs la numération orale française dit : *treize virgule sept et treize virgule quatre cent soixante-quinze.* On comprend alors pourquoi tant d'enfants jugent 13,7 plus petit que 13,475.

2.3 L'histoire de l'enseignement et l'histoire des sciences

Décimaux, fractions et proportionnalité sont mathématiquement liés (ils font partie du même champ conceptuel). Toutefois, l'école primaire française a jusqu'ici privilégié l'enseignement des décimaux à l'école primaire, reléguant les fractions et pourcentages à l'école primaire supérieure et l'enseignement algébrique de la proportionnalité à l'enseignement secondaire. Les équipes de l'INRP s'étaient interrogées à ce sujet dans les années 1975-80 : fallait-il enseigner les décimaux avant les fractions (rationnels) ou l'inverse ? Le débat avait été vif. Les raisons invoquées par les uns et les autres n'étaient pas suffisamment convaincantes pour le trancher. La question reste d'actualité. Certains se demandent si on peut inverser le cheminement qui a été celui de l'histoire des sciences : les propriétés des fractions comme rapports de grandeurs commensurables étaient connues au VI-Ve siècle avant J.C. ; on date la "naissance" des décimaux près de 20 siècles plus tard[8] .

III - Une étude de cas : la progression adoptée par "Maths et Calcul", CM_1, (Hachette 1987)

Toutes ces difficultés sont bien connues des formateurs de l'école primaire qui cherchent, au fil des manuels, "la" solution. Les choix ne sont pas faciles : qui peut prévoir les conséquences des options prises par les manuels ? C'est la raison de l'étude de cas présentée ci-après.

J'ai choisi l'ouvrage "Maths et Calcul" parce que la série conçue par R. Eiller a marqué le milieu enseignant. Les débutants en apprécient le livre du maître, facile à lire. Les séquences leur paraissent bien calibrées. L'ensemble de la collection réinterprète souvent des innovations issues de la recherche pédagogique. Jusqu'à ces dernières années, il a été un très grand succès de librairie.

J'ai examiné comment l'auteur avait conçu le démarrage des apprentissages : en effet, l'organisation des leçons, le choix des rappels, les exercices en contre-point, etc. sont révélateurs des options pédagogiques que l'auteur souhaite privilégier. J'ai essayé de voir de quelle tendance pédagogique le manuel pourrait être rapproché, parmi les plus caractéristiques qui influencent l'école primaire. Citons ces dernières :

- Privilégier la règle d'usage : l'enseignant doit conduire la classe au plus vite à la procédure experte. Cette procédure sera répétée jusqu'à ce qu'elle soit mémorisée pour la vie (!), dans les contextes qui sont ceux que l'élève rencontrera le plus fréquemment. C'est une méthode qui est utilisée dès l'école maternelle : c'est par exemple comme cela que les enfants apprennent le début de la chaîne numérique et son emploi pour le dénombrement de collections.

- Privilégier les situations liées à la vie de la classe, ce que Célestin Freinet a voulu instaurer. Les enfants ont un projet dont la réalisation suppose la mise en oeuvre d'outils mathématiques. Les notions mathématiques sont abordées quand elles sont nécessaires.

- Introduire les outils mathématiques à travers la résolution de problèmes ad hoc et examiner leurs propriétés : cette pédagogie s'est développée en même temps que se diffusaient les théories d'apprentissage constructivistes[9].

Ces trois tendances pédagogiques ont chacune leur cohérence et leurs zones de réussite. Elles ne sont pas exclusives l'une de l'autre : il est en effet intéressant, suivant le moment de l'apprentissage, de jouer de l'une ou l'autre de ces approches. Mais il est rare qu'un auteur de manuel mélange les approches lorsqu'il propose un nouvel apprentissage.

Plus précisément, j'ai examiné le manuel "Math et Calcul" en me posant les questions suivantes :

- quelles connaissances sont supposées acquises pour démarrer l'activité proposée ?

- sur quoi repose l’introduction : un jeu ? une manipulation matérielle ? une évocation du quotidien ? un problème à résoudre ?

- ce qui est obtenu est-il relié aux connaissances antérieures ? quelle règle est mise en évidence ?

- quels moyens de contrôle sont proposés ?

- quelle place est faite à la calculatrice ?

- quelle place est faite aux nombres tabous : ceux qui ont des zéros intercalaires, ou plus petits que 1, ou encore ceux dont la partie décimale commence par plusieurs zéros ?

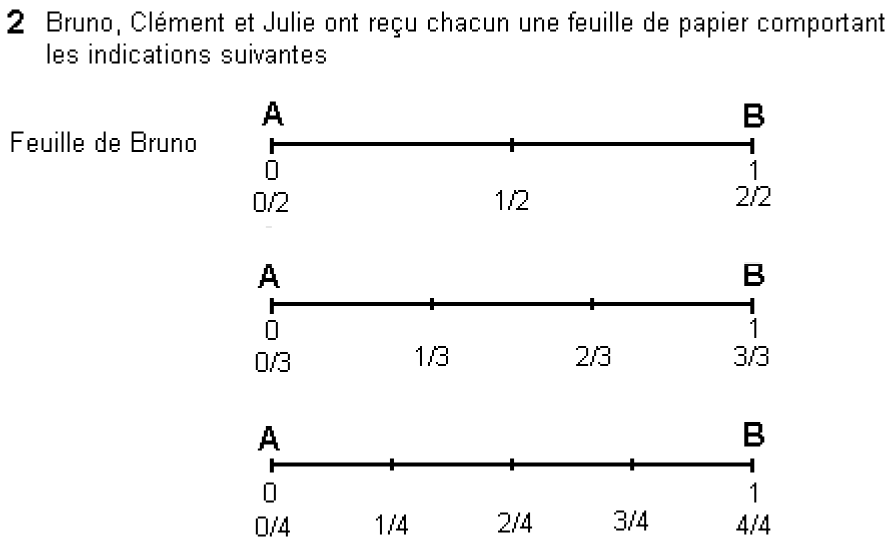
- comment les différences entre entiers et décimaux sont-elles abordées ?

- quelle liaison est faite avec la division des entiers et les fractions usuelles ?

Les remarques qui suivent ne proviennent pas d'observations de classes qui utiliseraient la progression de "Maths et Calcul", mais de l'analyse de ce que propose le manuel.

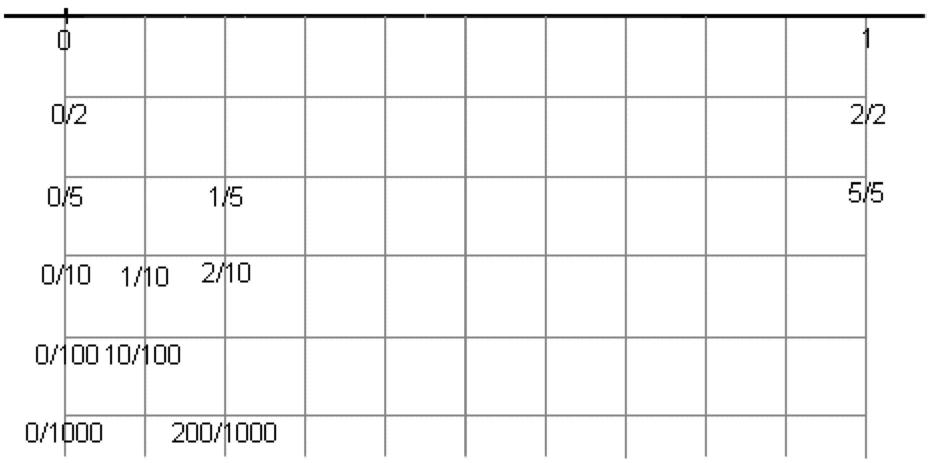
Leçon 1 : Situation de démarrage (p.136 et 137)

Des bandes de papier identiques sont partagées en 2, 3, 4 parties égales. Le codage des points de pliage est imposé par le livre : 0/2, 1/2, 2/2 etc.



Un même papier millimétré est utilisé pour des codages de type a/2, a/5, a/10, a/100, a/1000. Des traits de couleur (qui n'apparaissent pas sur la reproduction ci-après) permettent de distinguer les partages en 2, 5, 10, 100.

3 Reproduis le dessin sur une feuille de papier millimétré et trouve les écritures qui manquent

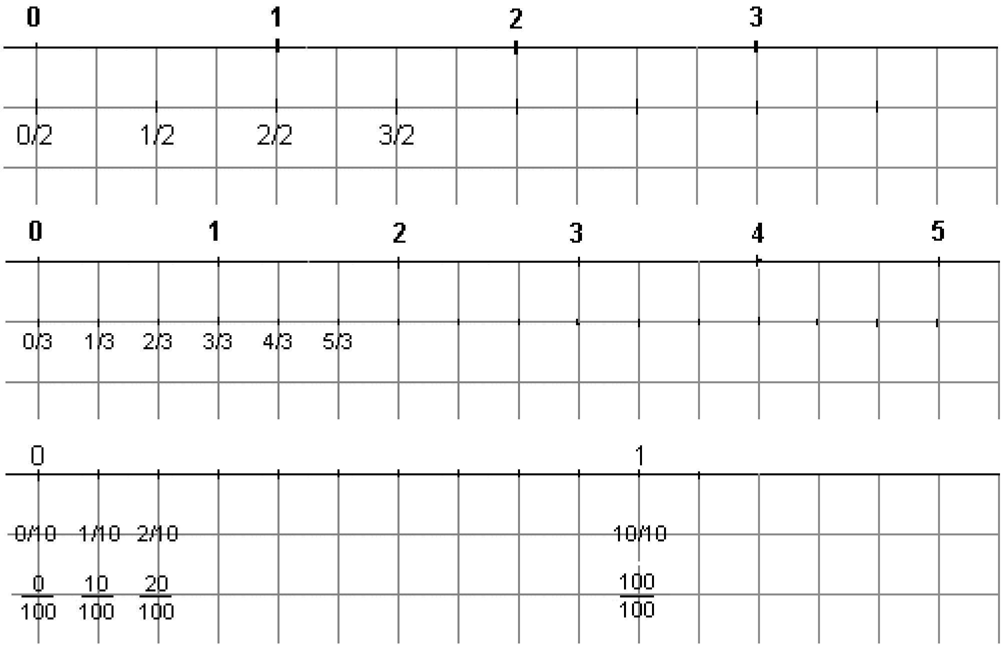


En mentionnant "recherche", au début de l'étude, l'auteur semble vouloir se rattacher au courant de la résolution de problèmes. Les enfants peuvent en effet s'interroger sur le pourquoi des traits de couleur à tel emplacement. Il n'est pas sûr qu'ils voient pourquoi certains traits de couleur les empêchent de coder des points avec le dénominateur 2 ou 5.

En fait, l'ensemble de la recherche repose sur l'analogie. Il n'y a pas de procédures approximatives qui seraient ensuite améliorées. Les enfants doivent deviner eux-mêmes la règle utilisée pour le codage, règle qui sera probablement soulignée par l'enseignant.

La règle est plus facile à détecter pour les trois dessins du bas de la page 137 : la suite des numérateurs est régulière (de 1 en 1, sauf pour la dernière ligne).

4 Reproduis les dessins et trouve les fractions qui manquent



Explique et justifie les écritures que tu proposes

Ici, chaque graduation correspond à un partage (en a/2, a/3, a/10), les numérateurs vont dans l'ordre et les dénominateurs sont stables pour un même graphique. Les trois échelles sont différentes, ce qui risque d'avoir des répercussions lors de l'introduction de l'égalité.

Le premier exercice d'application porte sur la lecture en français : traduire de manière chiffrée un tiers, deux quarts, ou traduire en lettres 5/2 ou 5/1000. Cette lecture ne s'appuie pas sur les propriétés du nombre, ni même la structure de la langue française : deux quarts, ce n'est ni un quart plus un quart, ni deux fois un quart. Pourtant cette relation aurait été possible si les graduations avaient été utilisées pour coder aussi les longueurs (et pas seulement les points).

Le deuxième exercice porte sur l'égalité des fractions.

2 Recopie et complète les égalités et dis chaque fois ce que tu constates.

$$0 = \frac{0}{2} = \frac{\quad}{3} = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{1000}$$

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{\quad}{3} = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{1000}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{1000} \qquad \frac{2}{5} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{1000}$$

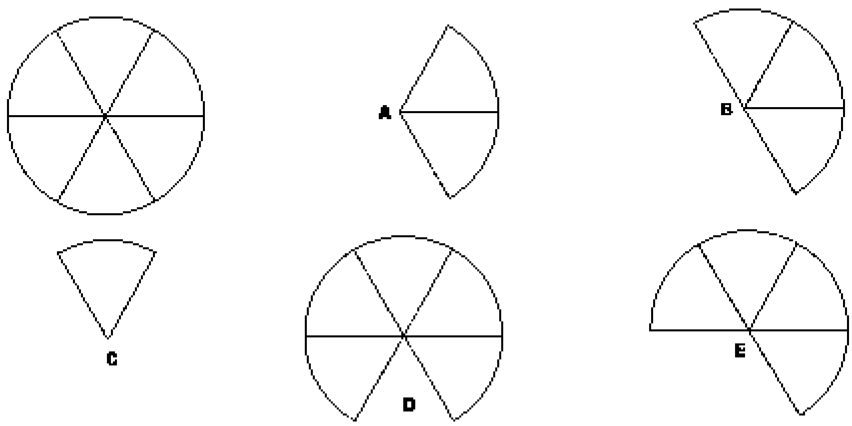
$$\frac{1}{5} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{1000} \qquad \frac{4}{5} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{1000}$$

La consigne invite à recourir à la perception, probablement par retour à l'exercice 3. On ne voit pas d'appel à contrôler ce qui est écrit par les propriétés numériques du partage. Pourtant, quand on a partagé en 100 parties égales et qu'on a pris le 30-ième point, c'est comme partager en 10 parties égales et prendre le 3-ième point. Là encore, cette équivalence résulte du codage des longueurs et non des positions des points.

Il n'y a pas de "recollement" entre entiers et fractions. Pourtant, il n'est pas très coûteux, à ce stade, de demander un autre nom de 3 quand on partage l'unité en 5, ou encore quand on partage l’unité en 100. De même, il est possible de demander entre quels entiers se trouve 123/5 , ou encore 8235/100 .

Le dernier exercice d'application de la leçon utilise une représentation de l'unité sous forme de disque.

$\boxed{4}$ Observe le disque et les différentes portions qu'on y a tracées.



* Reproduis et cmplète le tableau en y inscrivant, sous la forme d'une ou de plusieurs fractions, la mesure de chaque portion de disque (regarde l'exemple)

A	B	C	D	E
$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$				

Apparemment, les enfants sont supposés savoir d'office sur ce nouveau matériel comment transposer le codage des partages, alors qu'ici ce sont des aires qui sont codées (l'analogue aurait été les longueurs pour la droite numérique).

L'exercice de calcul mental qui achève la leçon est sans rapport avec l'introduction des fractions. Pourtant on aurait pu demander, par calcul mental, où pouvait être situé 60/4 ou encore 61/4. Mais peut-être l'auteur conçoit-il ses séances de calcul mental comme des unités indépendantes qui permettent d'entretenir des acquis.

Quelle est la conception pédagogique qui soutient cette approche ? Ce n'est pas clair, car il y aurait plusieurs règles à dégager, apparemment non reliées les unes aux autres. Cela ne répond pas à un problème de vie de la classe. Le problème ad hoc serait celui de deviner ce que l'enseignant veut que l'on découvre !

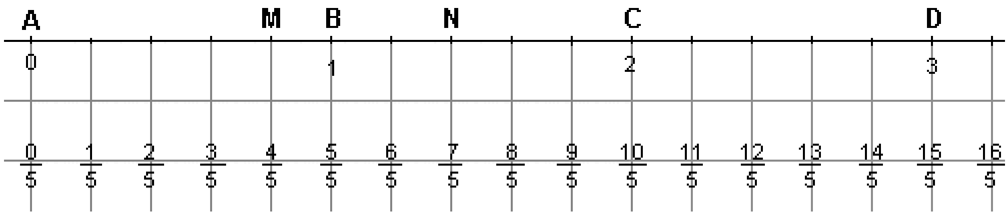
Les instruments de contrôle dont dispose l'élève ne sont pas liés à des propriétés mathématiques en cours d'élucidation. Pas de lien explicite avec les savoirs antérieurs de la classe.

Leçon 2 : Additions, soustractions de fractions et d'entiers. Partie entière et partie fractionnaire d'une fraction. (p. 140)

La recherche est basée sur l'observation d'une graduation.

RECHERCHE

Observe les points et les fractions correspondantes.



a) Peux-tu, en te reportant à ce schéma, expliquer les égalités suivantes ?

$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ $\quad$ $\frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

b) Même question pour les égalités :

$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ $\quad$ $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$ $\quad$ $\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$ $\quad$ $\frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5}$

Comment ferais-tu pour calculer la partie entière des fractions : $\frac{23}{5}$, $\frac{26}{5}$ et $\frac{32}{5}$?

Ecris dans chaque cas l'égalité correspondante.

On peut se demander comment les enfants pourront dégager les règles d'addition ou de soustraction des fractions de même dénominateur, en utilisant le seul graphique tel qu'il est dessiné. Au mieux, ils dégageront l'algorithme d'addition ou de soustraction des numérateurs. En effet, l'addition des fractions repose sur l'additivité des longueurs : or les longueurs ne sont pas matérialisées sur le graphique.

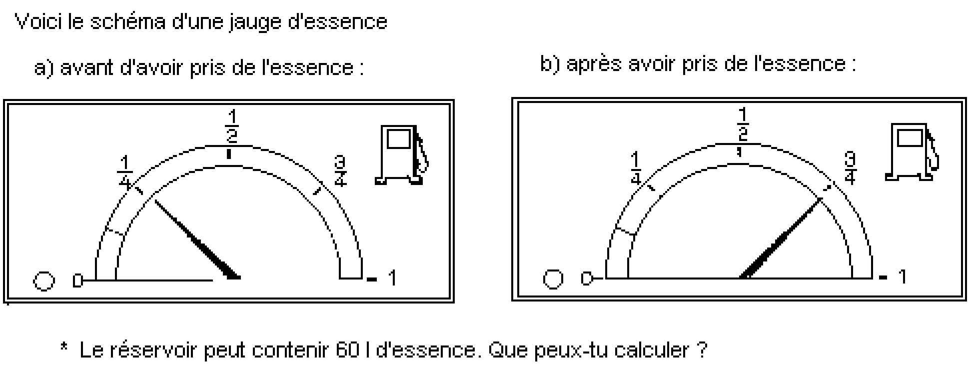
La règle d'addition et de soustraction est facile à mémoriser. Notons qu'elle ne fait l'objet d'aucun contrôle indépendant, que ce soit par ordre de grandeur ou par recours au schéma.

L'addition et la soustraction sont présentées indépendamment de la comparaison des nombres. Or elles interviennent dans le calcul des distances entre les nombres : en effet,

9/5 = 1 + 4/5 et donc 9/5 > 1

9/5 = 2 - 1/5 et donc 9/5 < 2

La leçon se termine par un exercice de repérage de fractions sur une jauge à essence.



Cet emploi des fractions est intéressant : il utilise une graduation courbe, à une dimension, limitée à l'intervalle [0, 1], pour représenter une grandeur différente (une capacité). La fraction sera utilisée ensuite comme multiplicateur. Mais quel rapport avec les usages de la fraction introduits jusqu'ici ? Le "problème" est entièrement nouveau pour les élèves, alors qu'il aurait pu être rapproché des pages concernant la proportionnalité.

La leçon se termine par un exercice de calcul mental sur la multiplication par 5, indépendant du thème du jour.

Leçon 3 : Introduction de l'écriture décimale (p. 142)

On présente les informations suivantes comme un rappel :
82648/1000 = 82 + 648/1000 ou
82648/1000 = 82 + 600 /1000 + 40/1000 + 8/1000 ou
82648/1000 = 82 + 6/10 + 4/100 + 8/1000

Or de telles égalités n'ont pas été explicitées auparavant. Comment les enfants vont-ils comprendre ? Justement, il aurait été utile de comparer préalablement 82, 826/10, 8264/100, 82648/1000 et d'exprimer leurs écarts par des sommes.

Le tableau décimal est proposé ensuite.

2 Observe

centaines	dizaines	**unités**	dixièmes	centièmes	millièmes
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
	3	4	2		
		6	2	5	
	8	2	6	4	8

Nouvelle écriture

34,2
6,25
82,648

Le nombre 34,2 se lit : trente-quatre virgule deux ou trente-quatre unités deux dixièmes

Le nombre 6,25 se lit : six virgule vingt-cinq
ou six unités vingt-cinq centièmes
ou six unités deux dixièmes cinq centièmes

Comment se lit le nombre 82,648 ?

Notons une erreur de présentation dans le tableau. Les nombres 100, 10, 1, 1/10, etc. auraient dû être écrits avec les mêmes valeurs que les mots intitulés des colonnes, puisque ce sont eux qui guideront la numération orale.

La liaison avec la multiplication n'est pas mise en évidence, alors que c'est l'usage qui en est fait pour les entiers. Il n'y a pas de lien entre "vingt-cinq centièmes" et 25 x 1/100. La numération orale est basée sur l'usage social ou scolaire : c'est l'analogie qui guidera le travail de l'élève.

On se demande aussi pourquoi l'auteur ne détaille par les chiffres de la partie entière (3 dizaines, 4 unités et 2 dixièmes).

Vient ensuite un rappel de l'emploi des décimaux dans la vie courante.

3 Voici des écritures que tu as souvent vues dans les magasins ou à la télévision :

7,50 F	F 45,75	2 m 50	8,6 m	1.250 kg
0,50 F		3,60 m		0,5 kg

a) Peux-tu, pour chacune d'entre elles, expliquer ce qu'elle signifie ?

b) Ecris chacun de ces nombres sous la forme :
- d'une fraction décimale ;
- d'une somme de sa partie entière et de sa partie décimale

En quoi le changement d'écriture va-t-il aider les enfants à comprendre ce qu'ils font sur les fractions ou ce qu'ils faisaient sur les décimaux de la vie courante ? Le "recollement" parait artificiel.

Il n'y a pas de moyen de contrôle. Seul l'enseignant peut dire si le résultat annoncé par l'élève est juste.

La numération orale (p. 144) n'est pas reliée aux opérations (additions et multiplications). Elle est, par ailleurs, contradictoire avec le tableau qui détaille chiffre à chiffre : comment interpréter zéro unité quatre-vingt-trois centièmes, quand ce qui a été présenté est du type zéro unité huit dixièmes et trois centièmes ?

Le signe = ou ≠ est l'objet d'un exercice en page 145 où des nombres entiers sont écrits avec des zéros à gauche, ce qui n'est pas habituel en mathématiques. On ne reverra plus cette écriture par la suite.

Recopie et mets le signe = ou ≠

23 023 04,60 046,0 4,56 04,56

002,3 2,3 0046 43,06 0,08 00,8

La leçon se termine sur l'emploi de la calculatrice qui oblige à mettre en relation les opérations et la position des chiffres.

Affiche le nombre 165,248. Sans effacer ni changer les autres chiffres, que dois-tu faire pour remplacer le chiffre 2 par le chiffre 3 ? etc.

Le calcul mental propose des divisions exates par 10, 100 et 1000 appliquées à des nombres entiers. Il aurait été intéressant de proposer plutôt des divisions euclidiennes qui auraient conduit à des encadrements.

Leçon 4 : Comparaison de nombres décimaux (p. 146 et 147)

Les trois premiers exercices sont bâtis sur le même patron : l'élève doit placer sur une droite graduée dans D_0 des décimaux de D_1, puis dans D_1 des décimaux de D_2, puis dans D_2 des décimaux de D_3. Il n'y a donc jamais plus d'un chiffre de décalage entre les nombres à comparer. Sur quoi les enfants peuvent-ils fonder leur réponse ? Uniquement sur la constitution du dessin. Apparemment, la recherche ne s'appuie ni sur l'addition ni sur la soustraction.

Sans doute l'enseignant aboutira-t-il à la règle traditionnelle de l'ajout de chiffres zéros autant que nécessaire pour la partie décimale, mais rien ne le met en évidence dans la mise en page.

Notons un saut dans l'exercice d'application n°1 de la page 147 .

1 Recopie et mets le signe <, > ou =.

a)	**b)**	**c)**	**d)**
2,5 2,3	4,51 4,52	3,5 3,49	2,345 2,875
2,6 2,7	4,68 8	6,2 6,3	6,103 4,999
18,2 16,2	48,00 48	12,57 12,8	7,538 7,547
125,0 125	12,90 12,91	84,60 84,45	8,3 8,300
24,0 24,5	14,39 14,48	30,80 30,8	1,275 1,9
32,9 33,1	74,01 73,99	18 18,00	12,399 12,4

Après chaque série, explique comment tu as procédé

Les deux derniers couples à comparer, 1,275 1,9 et 12,399 12,4 , ne ressemblent à aucun de ceux qui ont été présentés dans la partie "Recherche" : on suppose que l'élève sait passer de D_1 à D_3, directement.

La comparaison de nombres décimaux se poursuit par l'approche des encadrements (p. 148).

Ecris du plus petit au plus grand tous les nombres décimaux ayant deux chiffres après la virgule et compris entre 3,15 et 3,25.

Même exercice pour les nombres décimaux compris entre 3,1 et 3,2.

ou encore

Trouve le nombre naturel le plus proche de chacun des nombres décimaux suivants.

ou encore

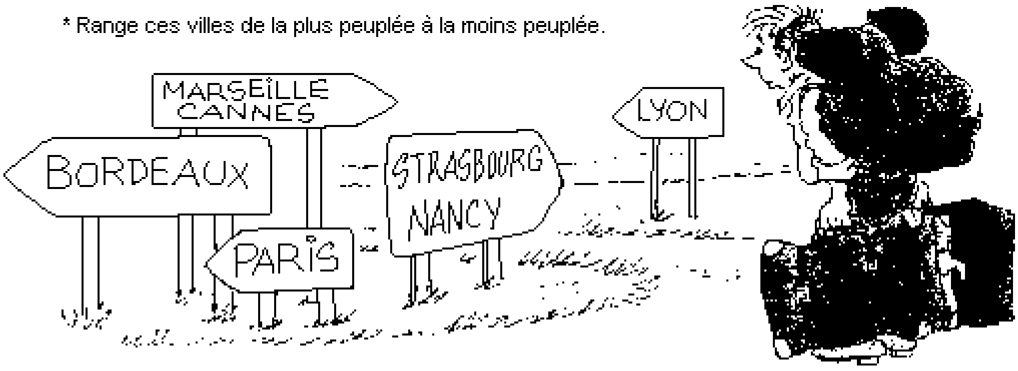
Encadre chacun des nombres décimaux suivants entre deux naturels qui se suivent (...) (puis) entre deux nombres ayant un chiffre après la virgule et qui se suivent.

On encadre donc des nombres de D_2 par des nombres de D_1, ou des nombres de D_1 par des nombres de D_0. Il n'y a pas de liaison avec le calcul approché (estimation ou ordre de grandeur).

Le problème de la page 149 utilise une écriture décimale pour désigner des entiers, dans une situation de mélange d'unités dans un tableau.

Voici une liste de villes françaises avec leur nombre d'habitants exprimé à l'aide d'unités diverses.

Strasbourg	3,5	(en centaines de milliers d'habitants)
Marseille	8,9	(en centaines de milliers d'habitants)
Nancy	26,2	(en dizaines de milliers d'habitants)
Lyon	52,8	(en dizaines de milliers d'habitants)
Bordeaux	2,67	(en centaines de milliers d'habitants)
Cannes	590,50	(en centaines d'habitants)
Paris	2,59	(en millions d'habitants)



Cet exercice est intéressant à faire en relation avec la multiplication des décimaux par des puissances de dix : mais cela n'a pas été encore introduit. On se demande à quels moyens les élèves peuvent recourir pour résoudre un tel problème, à part le tableau du système décimal.

Le calcul mental (division par 5) est, là encore, indépendant du reste de la leçon.

Sur la dizaine de pages, les procédés pédagogiques sont constants : la mention "recherche" ne recouvre pas ce qui est mis sous ce mot dans les publications inspirées du courant constructiviste. Il s'agit probablement de poser une énigme aux élèves les plus doués, qui vont devancer l'attente de l'enseignant et dégager la règle du jour. Cette règle n'est pas mentionnée explicitement dans la mise en page.

Les problèmes inspirés de la vie courante n'ont pas de rapport avec la leçon du jour. Le calcul mental est indépendant des thèmes traités.

Les règles implicites ne sont pas reliées les unes aux autres : pas d'articulation entre l'addition et l'ordre, pas de lien entre la division euclidienne et les fractions ou entre la division par dix et les nombres décimaux. Le rapport entre la géométrie des intervalles et l'intercalation n'est pas explicite.

L'ensemble constitue une mosaïque d'exercices. L'élève peut apprendre, mais il lui faudra répéter souvent les exercices-types.

IV - Des bribes de solutions

Depuis les années 1970, des équipes d'origines diverses ont cherché des progressions. Nous avons évoqué l'époque des "mathématiques modernes" avec le recours aux partages de segments en différentes bases. Le codage de points par des écritures à virgule a été repris sous forme fractionnaire. Il est significatif que les trois points de vue soient présents dans le numéro spécial de la revue Grand N pour le cours moyen , tome 1, (1981)[10] .

L'équipe Ermel a proposé dans son ouvrage pour le cours moyen (1982) deux progressions sur les décimaux. L'une oblige à développer l'étude des fractions, alors qu'elles ne sont pas explicitement au programme. L'autre propose un jeu formel qui a peu de points d'ancrage sur les problèmes classiques de l'école élémentaire. Contrairement aux autres chapitres du livre, cela a peu influencé les auteurs de manuels scolaires.

La série "Objectif Calcul" (1987) propose des problèmes de démarrage qui sont de vrais problèmes de recherche, avec pour instrument de contrôle la calculatrice. Mais ces problèmes sont difficiles et la recherche est guidée pas-à-pas, avec quelquefois des sauts importants entre la phase de recherche et l'aide-mémoire de la leçon. Pourtant les auteurs décrivent leurs intentions avec clarté dans le livre du maître : les entiers sont insuffisants ; la calculatrice donne des décimaux quand on divise deux entiers ; la liaison avec le cadre graphique sera faite avec du papier millimétré ; les décimaux sont denses. Les auteurs soulignent qu'en fin de CM_2 il sera alors possible d'établir un lien fondamental entre division, fractions (comme quotients exacts) et décimaux (comme quotients décimaux approchés).

D'autres équipes se sont donné le temps de lier l'enseignement des fractions, aux décimaux et à la proportionnalité : Guy et Nadine Brousseau à l'IREM de Bordeaux, François Colmez, Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin à l'IREM de Paris VII. Dans les deux cas, le travail a porté sur quatre niveaux successifs : les deux années de cours moyen, la 6ème et la 5ème. Ces progressions supposent non seulement une réorganisation des programmes sur les quatre années mais aussi l'adoption d'un point de vue constructiviste, ce qui n'est pas aisé pour la majorité du corps enseignant. Beaucoup d'enseignants en poste s'interrogent sur la lenteur apparente des apprentissages, sur la difficulté à gérer les interactions dans la classe et sur le contrôle des écarts entre les enfants. Dans l'immédiat, de telles progressions ne peuvent être adoptées que dans les lieux où les enseignants de collège s'intéressent à ce qui a été fait à l'école élémentaire[11] .

Il reste à notre disposition pour les classes ordinaires quelques règles de bon sens.

- Il est inutile de travailler sur les décimaux si les propriétés de la numération sont "flottantes" pour des entiers : multiplier par 10,100, 1000 ou par 20, 300, 4000, doit se faire sans erreur. De même, en calcul mental, la recherche des quotients et restes dans les divisions par 10, 100, 1000 doit être un exercice banal ; en calcul rapide écrit, celle des quotients et restes dans les divisions par 2, 5, 25, 50, 125, 250, etc...doit être conduite dans des temps "raisonnables".

- L'entraînement au calcul préalable de l'ordre de grandeur doit devenir réflexe : 132 x 42 est proche de 5000. Cela servira également à contrôler des calculs du genre de 47,5 - 12,923 (erreur par alignement par le dernier chiffre à droite) ou 128,453- 3,7 (erreur par soustraction séparée des parties entières et décimales).

- La référence aux unités doit être faite dans les changements d'unités (compensation citée plus haut). C'est d'ailleurs une préparation à l'algèbre de l'enseignement secondaire.

- Le recours à la droite numérique doit utiliser à la fois le codage de points et le codage de longueurs, pour mettre en évidence la structure additive sous-jacente (et donc les mesures d'écart).

- La calculatrice peut être une boîte noire avec laquelle les élèves expérimentent les propriétés des décimaux.

- Les propriétés de linéarité de la proportionnalité doivent être mises en évidence chaque fois que c'est possible. Pour multiplier 12,6 par 13,05, on décomposera en
12 x 13, 12 x 0,05, 13 x 0,6 et 0,6 x 0,05.

- On pourra travailler sur les "décimaux dans la vie sociale", car ils donneront des points de contrôle partiels pour les "vrais décimaux", mais ils présentent l'inconvénient d'assimiler les premiers décimaux rencontrés avec des entiers, source d'erreurs répétées. En parallèle, il sera indispensable d'aborder les divergences de points de vue entre la mesure (physique) et le calcul. Par exemple, quand on mesure la diagonale d'un carré (dessiné), le nombre obtenu est décimal (ou mieux, c'est un intervalle) ; quand on calcule la longueur de la diagonale d'un carré de 10 cm de côté, le nombre obtenu n'est pas un décimal, mais un irrationnel[12].

Je me demande si l'on peut étudier les propriétés des décimaux sans recourir aux fractions, présentées à la fois comme longueurs et comme aires (voir les puzzles de Régine Douady qui fournissent un répertoire additif et multiplicatif sur les fractions), sans utiliser la calculatrice comme un objet à fabriquer des nombres décimaux.

Je m'interroge sur les finalités de l'enseignement des décimaux à l'école primaire. L'enseignement des programmes de 1945 visait la résolution de problèmes dits concrets ; les techniques de calcul nécessaires dans le domaine des décimaux s'automatisaient à force d'exercices répétitifs. Il n'était pas nécessaire d'examiner les propriétés des nouveaux nombres que représentent les décimaux. Aujourd'hui, les programmes de l'école élémentaire sont conçus en relation avec l'enseignement secondaire : les décimaux représentent une marche dans la connaissance qui conduira ensuite aux réels, particulièrement intéressants dans la résolution de problèmes internes ou externes aux mathématiques. Or tout ce qui précède montre les grandes difficultés de ce projet et je ne parle pas de la liaison (ou de l'absence de liaison), dans l'enseignement secondaire, entre l'emploi des décimaux en mathématiques et dans les autres disciplines.

V- Conclusion

Résumons les obstacles que rencontrent les enseignants sur le thème des décimaux.

- Les algorithmes de calcul sur les décimaux s'automatisent facilement. Mais en l'absence d'ancrage sur les propriétés des décimaux ou d'exercices répétitifs, ils "dérapent".

- Dans les pratiques enseignantes les plus répandues et dans les évaluations officielles, on rencontre très peu de problèmes qui rendent ces outils nécessaires. Les règles dégagées n'ont pas d'ancrage problématique. C'est l'aspect formel (désignations, jeux d'écriture) qui est mis en relief[13] .

- Certains modes d'introduction s'appuient sur une fabrication matérielle de partages, selon une approche que l'on pourrait qualifier de technologique. Or l'intercalation indéfinie ne s'obtient pas par une opération matérielle, c'est une opération de pensée. Il n'y a pas de problème "lié à la vie de la classe" qui la rende nécessaire.

- La liaison entre la notion d'intervalle sur la droite numérique et celle d'encadrement va de soi chez ceux qui jouent sans difficulté sur le double statut du nombre, position et distance. C'est ce qui fonde le calcul des approximations. Or ces thèmes sont peu présents dans les programmes et peu travaillé dans les classes.

- Le calcul algébrique est beaucoup plus performant que le calcul sur les décimaux, chez les élèves qui le maîtrisent ! Apprendre à opérer avec des notations complexes (du genre 10R(7)) et contrôler l'emploi de valeurs approchées ne va pas de soi. Les programmes d'enseignement ne sont pas clairs sur les apports réciproques des décimaux et des réels dans la construction des apprentissages en calcul algébrique.

- La rupture entre l'école élémentaire et le collège est d'autant plus rude pour les enfants que l'étude des décimaux vient à peine de démarrer. Les enseignants de collège ignorent quels sont les acquis des enfants.

Comment éclairer un enseignant de l'école élémentaire à leur propos ?

Une prise de conscience pourrait être faite à partir des évaluations de 6ème. En particulier, il importe d'assurer une maîtrise correcte de la multiplication ou la division par des puissances de 10 avant tout travail sur les décimaux.

La calculatrice pourrait favoriser l'observation de quelques propriétés, à l'occasion de résolution de problèmes ; toutefois, il faudra problablement que l'on réfléchisse aux avantages et inconvénients de la troncature ou des arrondis.

Un des points qui me parait capital est la liaison entre ordre et addition, insuffisamment installée sur les entiers. Le contrôle des écarts entre les nombres sur la droite numérique me parait indispensable pour que le calcul des encadrements ait du sens.

J’ai déjà signalé ma préférence pour l’introduction des décimaux non usuels par les fractions. Une expérimentation en cours semble montrer qu’on pourrait travailler les partages de grandeurs continues avant même la division euclidienne[14]. Les "décimaux dans la vie sociale" pourraient continuer à être utilisés : leur maniement peut être contrôlé par les habitudes quotidiennes et les règles sont faciles à automatiser. Quant aux décimaux des mathématiciens, peu de choses me semblent pouvoir être faites à l’école élémentaire. Faire "bien" ce "peu", ne serait-ce pas faciliter la tâche de ceux qui accueilleront les élèves au collège ?

Bibliographie

Manuels

ERMEL, Mathématiques pour le cours moyen, Hatier, 1982.

Objectif Calcul, cours moyen première année, Hatier, 1987.

Evaluations des élèves

Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP), Evaluation du programme de mathématiques, fin de 6ème, 1987.

Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP), Evaluation du programme de mathématiques, fin de 6ème et 5ème , 1991.

Education et formations. Numéro hors série, janvier 1991. Evaluation CE_2-Sixième. Résultats nationaux.

L.O. POCHON, Connaissances mathématiques à l'école primaire, bilan des acquisitions en fin de cinquième et sixième année, fascicule 5, IRDP Neuchâtel, 1991.

Etudes

M.L. IZORCHE, Les réels en classe de seconde, mémoire de DEA, IREM de Bordeaux, 1977.

Collectif, La rigueur et le calcul, Cedic, 1982

C. GRISVARD et F. LEONARD, Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs, bulletin APMEP n° 327, 1981.

C. GRISVARD et F. LEONARD, Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux, bulletin APMEP n° 340, 1983.

M.J. PERRIN-GLORIAN, Représentations des fractions et des nombre décimaux chez des élèves de CM2 et de collège, Petit x n° 10,1986.

A. MERCIER, Enseigner les décimaux ? La division comme révélateur des obstacles dans l'enseignement et l'emploi des décimaux, Actes de l'Université d'été Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Olivet, 1988, publié par l'IREM de Bordeaux.

R. NEYRET, Les décimaux vus par les enseignants - Leurs stratégies face aux erreurs des élèves. Deux études de cas d'enseignants de CM2, DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Grenoble 1, 1991.

Revue Recherche en didactique des mathématiques (RDM)

G. BROUSSEAU, Problèmes de l'enseignement des décimaux, RDM n° 1/1, 1980.

R. DOUADY, Approche des nombres réels en situation d'apprentisage scolaire, RDM n° 1/1, 1980.

G. BROUSSEAU, Problèmes de didactique des décimaux, RDM n° 2/1, 1981.

G. BROUSSEAU, Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, RDM n° 4/2, 1983.

G. BROUSEAU et J. CENTENO, Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, RDM N° 11/2-3, 1991.

Propositions de progressions

G. et N. BROUSSEAU, Fractions et décimaux dans la scolarité obligatoire, IREM de Bordeaux, 1987.

R. DOUADY et M. J. PERRIN, Nombres décimaux, liaison école-collège, IREM de Paris VII, 1986.

On lira aussi avec intérêt les articles de la revue Grand N regroupés dans le numéro spécial pour le cours moyen, tome 1, (1981) : R. Neyret (n° 17, 1979),
R. Neyret et C. Comiti (n° 18, 1979), M. Coquand (n° 20 et 21, 1980) ; ainsi que la brochure de l'IREM de Grenoble : le nombre décimal en 6ème (1980).

ANNEXES : PROGRAMMES OFFICIELS

Extrait des programmes pour le cours moyen, (1985)

L'élève consolide et prolonge ses acquis concernant les nombres entiers et les quatre opérations, découvre les nombres décimaux et les fractions, aborde la proportionnalité (...).

A. Arithmétique

Ecriture, nom et comparaison des entiers naturels. Nécessité d'introduire de nouveaux nombres : nombres décimaux et nombres s'écrivant sous forme de fraction simples.

Ecriture et nom des nombres décimaux.

Désignation d'un nombre décimal par l'addition, la multiplication, la soustraction et la fraction ; passage d'une écriture à une autre. Comparaison des nombres décimaux (intercalation, encadrement).

Problèmes relevant de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division ; élaboration, dans l'ensemble des décimaux, des techniques opératoires, mentales ou écrites, et des procédés de calcul approché (ordre de grandeur et encadrements).

Reconnaissance et utilisation des fonctions numériques : n --->. n + a et n --->. n x a, et leurs réciproques, définies dans l'ensemble des nombres décimaux. Problèmes relevant de ces fonctions et plus particulièrement de la proportionnalité (exemple de la règle de trois).

Application des procédures de calcul mental dans l'ensemble des décimaux, en utilisant des techniques opératoires, et les propriétés des fonctions numériques étudiées.

Extraits des objectifs de cycle 3 (1991), rubrique "Connaissance des nombres" et "Calcul"

Connaissance des nombres

L'élève saura nommer, écrire des nombres entiers ou décimaux, passer d'une écriture à une autre, en particulier :
- associer écriture littérale et écriture chiffrée d'un entier, quelle qu'en soit sa taille,
- connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier et décomposer ce nombre suivant les puissances de dix ,
- employer quelques écritures fractionnaires usuelles (demi, tiers, quart, fractions décimales),
- connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre à virgule,
- passer, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire décimale (et réciproquement).

Il saura comparer des nombres, notamment :
- comparer deux entiers naturels quelconques et utiliser correctement les signes de comparaison, ranger des nombrers entiers,
- comparer, ranger des nombres à virgule,
- réaliser des encadrements (d'entiers ou de décimaux) et évaluer un ordre de grandeur,
- intercaler des entiers ou des décimaux entre deux nombres donnés.

Calcul

L'élève sera apte à calculer sur les nombres ; pour cela, il devra :
- utiliser à bon escient le calcul réfléchi (mental ou écrit) ; en particulier l'élève aura été entraîné à une pratique régulière du calcul mental dont il maîtrisera les méthodes usuelles (exemple : additionner deux nombres mentalement, réaliser certaines multiplications de tête, savoir multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10 / 100 / 1000, multiplier le cas échéant un nombre entier ou décimal par 0,1 / 0,01, connaître quelques critères de divisibilité...),
- maîtriser les techniques opératoires usuelles : addition, soustraction, multiplication des entiers ou des décimaux, division euclidienne (avec quotient et reste) de deux entiers, division d'un décimal par un entier (le calcul du quotient de deux décimaux n'est pas un objectif de ce cycle),
- évaluer un ordre de grandeur,
- utiliser la calculette.

Il saura reconnaître les problèmes qui relèvent des opérations évoquées ci-dessus.

Il sera capable d'utiliser quelques fonctions numériques, c'est-à-dire :
- identifier les données variables qui interviennent dans certaines situations,
- lire, construire et interpréter quelques schémas simples, tableaux, diagrammes, graphiques,
- reconnaître une situation de proportionnalité et la traiter par les moyens de son choix (utilisation de graphiques, de tableaux de nombres, de propriétés de linéarité, éventuellement de la règle de trois...).

Les notions de moyenne, de vitesse moyenne, d'échelle, de pourcentage font l'objet d'une première approche ; aucune technicité n'est exigée dans leur maniement.

De façon plus générale, les compétences dans le domaine de la proportionnalité sont en cours d'acquisition et feront l'objet d'une étude plus approfondie au collège.

Extraits du programme de 6ème (1987).

2- Travaux numériques

La résolution de problèmes concrets constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme : l'activité de résolution ne fait pas l'objet d'une rubrique particulière puisque, constamment, elle doit sous-tendre l'ensemble des travaux numériques.

Outre leur intérêt propre, ces problèmes doivent permettre aux élèves, en continuité avec l'école élémentaire, d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir **le sens des opérations et des équations** figurant au programme.

Les travaux numériques prennent apui sur la pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes : **le calcul mental, le calcul à la main (**dans le cas de nombres courants et d'opérations techniquement simples), **l'emploi d'une calculatrice.**

2.1. Techniques opératoires, calcul approché. Les travaux consolideront le sens et les techniques d'éxécution des opérations =, - , x sur les nombres entiers et les nombres décimaux. Ils complèteront les savoir-faire concernant la division euclidienne, la capacité à effectuer une telle opération étant, pour une proportion non négligeable d'élèves de CM_2, en cours d'acquisition. En particulier, ces travaux permettront de lier la division à des problèmes d'encadrement d'un entier par des multiplies d'un autre entier, et d'acquérir une bonne amîtrise de la technique manuelle de la division avec reste pour des nombres entiers simples. Les procédés de calcul approché trouveront un développement naturel dans le calcul mental et dans l'usage des calculatrices.	Compétences exigibles des élèves Les compétences exigibles des élèves portent sur les trois formes de calcul mentionnées ci-dessus : - Sans calculatrice : * effectuer des addditions, soustractions, multiplications sur des nombres décimaux courants ; * diviser un décimal par 10, 100, 1000 ou par 0,1, 0,01, 0,001 ; * effectuer la division avec reste d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres. - Prendre la troncature ou l'arrondi à l'unité. - Proposer des ordres de grandeur de deux nombres et les utiliser pour donner un ordre de grandeur de la somme de ces nombres et, éventuellement, pour contrôler un calcul sur machine.
2.2. Ecriture fractionnaire de décimaux Les travaux conduiront à l'écriture d'un nombre décimal sous diverses formes fractionnaires : initiation à la manipulation des fractions. Les techniques des opérations +, -, x ne seront exposées que dans le cas d'écritures fractionnaires ayant pour dénominateurs des puissances de dix, et cela en liaison étroite avec les techniques opératoires en écriture décimale. Les critères de divisibilité, que l'on ne justifiera pas, s'appliqueront à la simplification d'écritures fractionnaires et à des exercices de calcul mental.	- Sur des nombres décimaux courants : * passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa ; * effectuer des opérations techniquement simples en écriture fractionnaire, les dénominateurs étant des puissances de dix.

2.3. Quotient de deux décimaux *Il s'agit ici d'un simple jalon vers un élargissement des opérations. Dans ce paragraphe, on travaille uniquement sur des exemples numériques et au travers de problèmes. Ces travaux dégagent et utilisent les deux idées suivantes :* *- le quotient a/b de deux nombres décimaux est un nombre qui multiplié par b donne a ;* *- on ne change pas le quotient quand on multiplie a et b par un même nombre non nul.* La multiplication d'un nombre décimal par un quotient intervient, en particulier, dans des problèmes de proportionnalité.	- Avec une calculatrice : donner une approximation décimale d'un quotient de deux décimaux. - Sans calculatrice : mutiplier un décimal par a/b (a et b entiers) dans le cas d'une opération techniquement simple. - Avec une calculatrice : donner des approximations décimales du produit d'un décimal par a/b (a et b entiers). La multiplication d'un nombre décimal par un quotient intervient, en particulier, dans des problèmes de proportionnalité.
2.4. Initiation aux écritures littérales Il s'agit dans des situations contrètes, de schématiser un calcul (périmètre, aire..) en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacés par des valeurs numériques.	- Appliquer les formules littérales au cercle et au rectangle.
2.5. Rangement de nombres Les travaux se limiteront à une pratique sur les nombres en écriture décimale.	- Ranger des nombres courants en écriture décimale
2.6 Equations Certains problèmes concrets se traduisent par la recherche d'un élément manquant dans une addition ou dans une multiplication : c'est ce qu'on appelle une équation, mais il n'est pas nécessaire de désigner par une lettre le nombre manquant. La résolution des équations du type 2,05/ ( ) = 8,2 n'est pas exigible des élèves.	- Résoudre une équation du type 12,8 + ( ) = 53,1 - Résoudre une équation du type 23 x ( ) = 471,5

1 La nouvelle rédaction en cohérence avec les cycles sera peut-être plus claire (sortie prévue en mai 1993 !).

2 Robert Neyret a montré (1991) que l'interprétation habituelle sur les confusions homophoniques devait être revue.

3 Luc-Olivier Pochon a montré (1991) combien le passage des fractions décimales aux décimaux et l'inverse ont des taux de réussite différents.

4 On pourra se reporter à l'étude détaillée faite par Alain MERCIER (1988)

5

Voir l'ouvrage collectif *La rigueur et le calcul,* 1982, Ed. cédic.

6 Voir le numéro spécial de Grand N pour le cycle moyen, octobre 1981, où sont présentés les obstacles didactiques.

7

Ibid.

8

Parution de l'ouvrage de Stevin, *la Disme*, en 1585.

9 Beaucoup de travaux d'ingénierie didactique relèvent de cette conception.

10 Articles de Claude COMITI & Robert NEYRET, Serge BLOCHET, Robert NEYRET, Yvonne CHARNAY et Martial COQUAND

11

Voir les travaux de Julia. CENTENO et Guy BROUSSEAU sur la mémoire de la classe, 1992.

12 Ce décalage a été utilisé comme moteur d'une leçon (Robert NEYRET, 1991).

13 Alain MERCIER rappelle qu'historiquement, ce ne sont pas les problèmes qui sont à l'origine des études mathématiques sur les décimaux.

14 Recherche en cours d'Evelyne CHRISTIAENS